# Classification

## To learn more

接下来讲有关分类怎麼做这件事情,这边讲的是一个短的版本,因為时间有限的关係,如果你想要看长的版本的话,可以看一下过去上课的录影

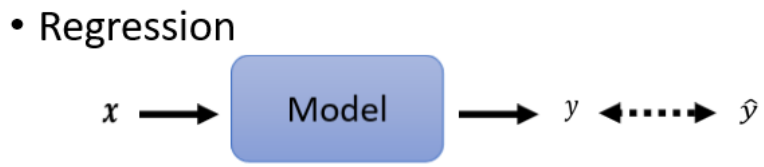
https://youtu.be/fZAZUYEeIMg
(in Mandarin)

https://youtu.be/hSXFuypLukA
(in Mandarin)

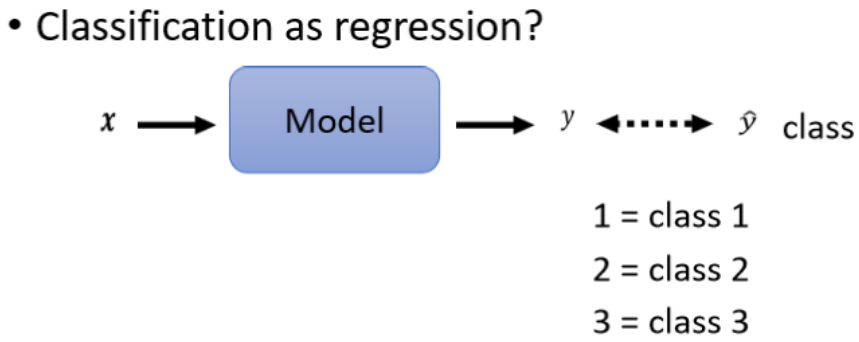
过去可能是花两个小时,到三个小时的时间才讲完,分类这件事情,我们这边用一个最快的方法,直接跟你讲分类是怎麼做的

## Classification as Regression?

分类是怎麼做的呢 我们已经讲了,Regression就是输入一个向量,然后输出一个数值,我们希望输出的数值跟某一个label,也就是我们要学习的目标,越接近越好，这门课里面，**如果是正确的答案就有加Hat,Model的输出没有加Hat**



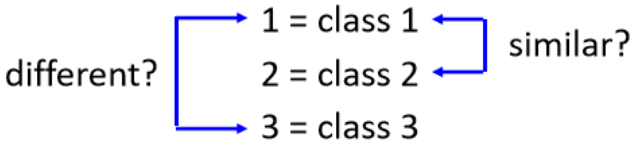

有一个可能,假设你会用Regression的话,我们其实可以**把Classification,当作是Regression来看**




这个方法不一定是个好方法,这是一个比较奇妙的方法,输入一个东西以后,我们的输出仍然是一个scaler,它叫做y 然后这一个y,我们要让它跟正确答案,那个Class越接近越好,但是**y是一个数字**,我们怎麼让它跟Class越接近越好呢,我们**必须把Class也变成数字**

举例来说 Class1就是编号1,Class2就是编号2,Class3就是编号3,接下来呢 我们要做的事情,就是希望y可以跟Class的编号,越接近越好

但是这会是一个好方法吗,如果你仔细想想的话,这个方法也许在某些状况下,是会有瑕疵的




因为如果你假设说Class one就是编号1,Class two就是编号2,Class3就是编号3,意味著说你觉得**Class1跟Class2是比较像**,然后**Class1跟Class3 它是比较不像**,像这样子的表示Class的方式,有时候可行 有时候不可行

- 假设你的Class one two three**真的有某种关係**举例来说,你想要根据一个人的身高跟体重,然后预测他是几年级的小学生,一年级 二年级 还是三年级,那可能一年级真的跟二年级比较接近,一年级真的跟三年级比较没有关係
- 但是假设你的三个Class本身,**并没有什麼特定的关係**的话,你说Class one是1,Class two是2 Class two是3,那就很奇怪了,因为你这样是预设说,一二有比较近的关係,一三有比较远的关係,所以怎麼办呢

# Class as one-hot vector

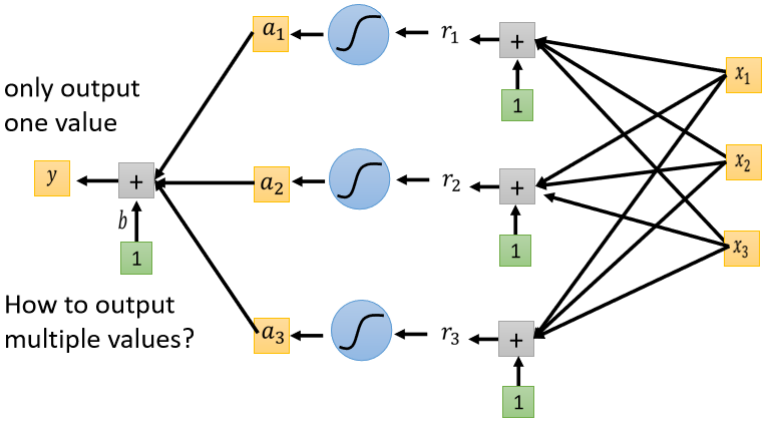
当你在做分类的问题的时候,比较常见的做法是把你的Class,用 One-hot vector来表示

$$\hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\text{Class 1}} \text{ or } \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\text{Class 2}} \text{ or } \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\text{Class 3}}$$

如果有三个Class,我们的 label 这个ŷ,就是一个三维的向量,然后呢 如果是Class1就是 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,如果是Class2就是 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,如果是Class3就是 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,所以每一个Class,你都用一个One-hot vector来表示

而且你用One-hot vector来表示的话,就没有说Class1跟Class2比较接近,Class1跟Class3比较远这样子的问题,如果你把这个One-hot vector,**用算距离的话,Class之间 两两它们的距离都是一样**

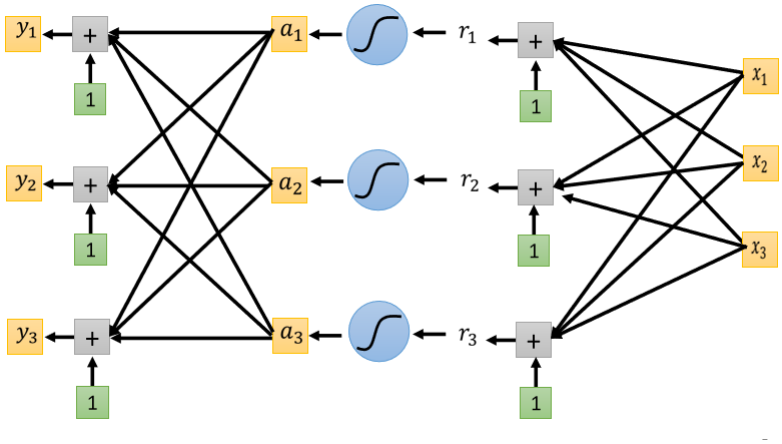
如果我们今天的目标y hat是一个向量 比如说,ŷ是有三个element的向量，那我们的network,也应该要Output的维度也是三个数字才行




到目前為止我们讲的network,其实都只Output一个数值,因为我们**过去做的都是Regression的问题,所以只Output一个数字**

其实**从一个数值改到三个数值,它是没有什麼不同的**

你可以Output一个数值,你就可以Output三个数值,所以把本来Output一个数值的方法,重复三次

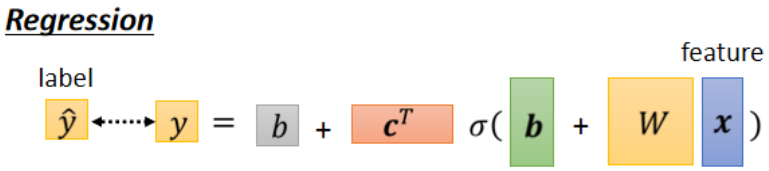



- 把$a_1$ $a_2$ $a_3$,乘上三个不同的Weight 加上bias,得到$y_1$
- 再把$a_1$ $a_2$ $a_3$乘上另外三个Weight,再加上另外一个bias得到$y_2$
- 再把$a_1$ $a_2$ $a_3$再乘上另外一组Weight,再加上另外一个bias得到$y_3$

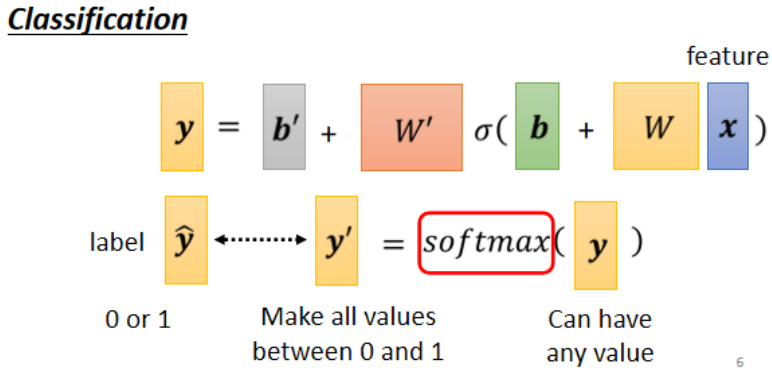
你就可以產生三组数字,所以你就可以Input一个feature的Vector,然后產生$y_1$ $y_2$ $y_3$,然后希望$y_1$ $y_2$ $y_3$,跟我们的目标越接近越好,

# Classification with softmax

好 那所以我们现在,知道了Regression是怎麼做的,Input x Output y 要跟 label ŷ,越接近越好




如果是Classification,input x可能乘上一个W,再加上b 再通过activation function,再乘上W'再加上b' 得到y,我们现在的**y它不是一个数值,它是一个向量**




但是在做Classification的时候,我们往往会**把y再通过一个叫做Soft-max的function得到y'**,然后我们才去计算,y'跟y hat之间的距离

為什麼要加上Soft-max呢,一个比较简单的解释（如果是在过去的课程裡面,我们会先从generative的Model开始讲起,然后一路讲到Logistic Regression）

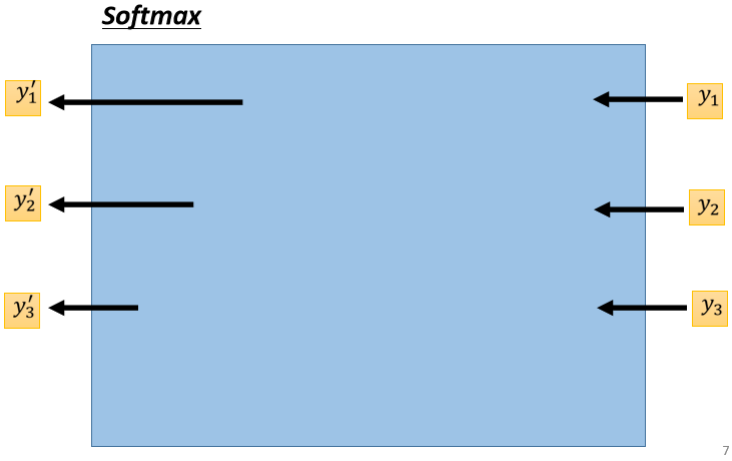
这边有一个骗小孩的解释就是,这个ŷ 它裡面的值,都是0跟1,它是One-hot vector,所以裡面的值只有0跟1，但是y裡面有任何值

既然我们的目标只有0跟1,但是y有**任何值**,我们就先把它Normalize到**0到1之间**,这样才好跟 label 的计算相似度,这是一个比较简单的讲法

如果你真的想要知道,為什麼要用Soft-max的话,你可以参考过去的上课录影,如果你不想知道的话,你就记得这个Soft-max要做的事情,就是把本来y裡面可以放任何值,改成挪到0到1之间

# Softmax

这个是Soft-max的block,输入$y_1$ $y_2$ $y_3$,它会產生$y_1'$ $y_2'$ $y_3'$

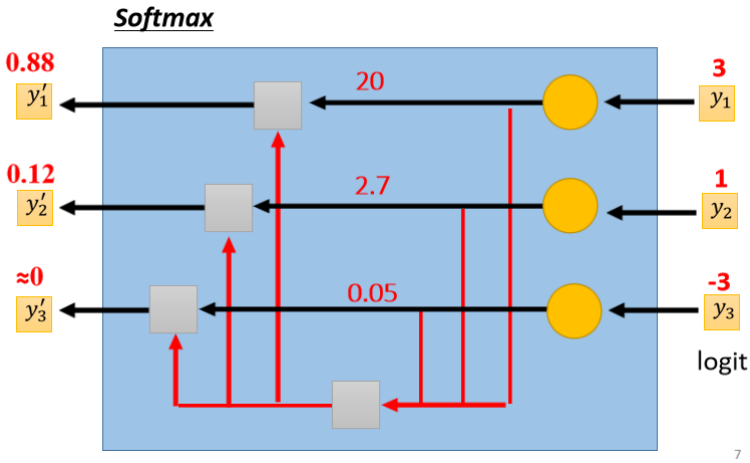



它裡面运作的模式是这个样子的

$$y_i' = \frac{exp(y_i)}{\sum_j exp(y_i)}$$

我们会先把所有的y取一个exponential,就算是负数,取exponential以后也变成正的,然后你再对它做Normalize,除掉所有y的exponential值的和,然后你就得到y'

或者是用图示化的方法是这个样子




$y_1$取exp $y_2$取exp $y_3$取exp,把它全部加起来,得到一个Summation,接下来再把exp $y_1$'除掉Summation,exp $y_2$'除掉Summation,exp $y_3$'除掉Summation,就得到$y_1'$ $y_2'$ $y_3'$

有了这个式子以后,你就会发现

- $y_1'$ $y_2'$ $y_3'$,它们都是介於**0到1之间**
- $y_1'$ $y_2'$ $y_3'$,它们的**和是1**

如果举一个例子的话,本来 $y_1$等於3$y_2$等於1,$y_3$等於负3,取完exponential的时候呢,就变成exp3 就是20,exp1就是2.7,exp-3就是0.05,做完Normalization以后,这边就变成0.88  0.12 跟0

所以这个Soft-max它要做的事情,除了Normalized,让 $y_1'$ $y_2'$ $y_3'$,**变成0到1之间**,还有**和為1**以外,它还有一个附带的效果是,它会让大的值跟小的值的差距更大

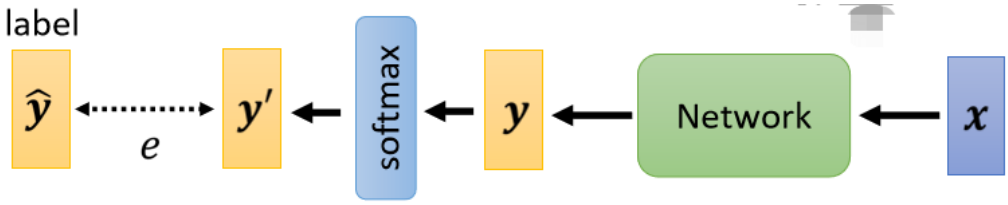
本来-3 然后通过exponential,再做Normalized以后,会变成趋近於0的值,然后这个Soft-max的输入,往往就叫它logit

这边考虑了3个class的状况,那**如果两个class会是怎麼样**

如果是两个class你当然可以直接套soft-max这个function没有问题,但是也许你更常听到的是,当有两个class的时候,我们就不套soft-max,我们直接取sigmoid

那当两个class用sigmoid,跟soft-max两个class,你如果推一下的话,会发现说这两件事情是等价的

# Loss of Classification




我们把x,丢到一个Network裡面產生y以后,我们会通过soft-max得到y',再去计算y'跟ŷ之间的距离,这个写作e

**计算y'跟ŷ之间的距离不只一种做法**,举例来说,如果我喜欢的话,我要让这个距离是Mean Square Error

$$e = \sum_i (\hat{y}_i - y'_i)^2$$

就是把ŷ裡面每一个element拿出来,然后计算它们的平方和,当作我们的error,这样也是计算两个向量之间的距离,你也可以说,你也可以做到说当minimize,Mean Square Error的时候,我们可以让ŷ等於y'

但是有另外一个更常用的做法,叫做Cross-entropy

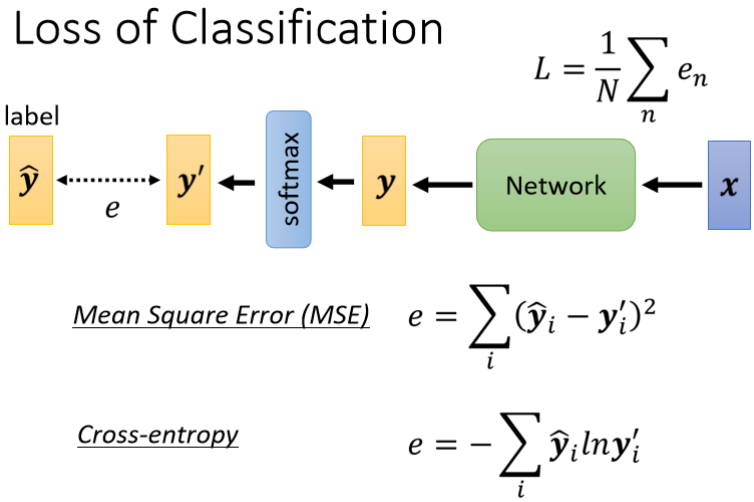
$$e = -\sum_i \hat{y}_i \ln y'_i$$

这个Cross-entropy它的式子乍看之下,会让你觉得有点匪夷所思,怎麼是这个样子呢

- Cross-entropy是summation over所有的i
- 然后把ŷ的第i位拿出来,乘上y'的第i位取Natural log
- 然后再全部加起来

这个是Cross-entropy,那当ŷ跟y'一模一样的时候,你也可以Minimize Cross-entropy的值,此时,MSE会是最小的,Cross-entropy也会是最小的

但是為什麼会有Cross-entropy,这麼奇怪的式子出现呢?




**Minimizing cross-entropy** is equivalent to **maximizing likelihood**.

那如果要讲得长一点的话,这整个故事我们可以把它讲成,**Make Minimize Cross-entropy其实就是maximize likelihood**,你很可能在很多地方,都听过likelihood这个词汇,详见过去上课影片

所以如果有一天有人问你说,如果我们今天在做分类问题的时候,maximize likelihood,跟Minimize Cross-entropy,有什麼关係的时候,不要回答说它们其实很像,但是其实又有很微妙的不同这样,不是这样,它们两个就是一模一样的东西,只是同一件事不同的讲法而已

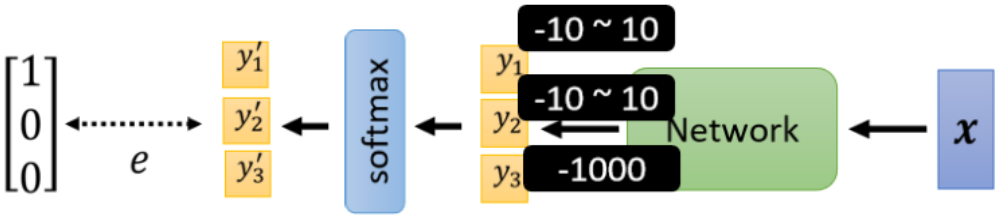
所以假设你可以接受说,我们在训练一个classifier的时候,应该要maximize likelihood就可以接受,应该要Minimizing Cross-entropy

在pytorch裡面,Cross-entropy跟Soft-max,他们是被绑在一起的,他们是一个Set,你只要Copy Cross-entropy,裡面就自动内建了Soft-max

那接下来**从optimization的角度,来说明相较於Mean Square Error,Cross-entropy是被更常用在分类上,**

那这个部分,你完全可以在数学上面做证明,但是我这边,是直接用举例的方式来跟你说明,如果你真的非常想看数学证明的话,我把连结放在这边http://speech.ee.ntu.edu.tw/~tlkagk/courses/MLDS_2015_2/Lecture/Deep%20More%20(v2).ecm.mp4/index.html你可以一下过去上课的录影

如果你不想知道的话,那我们就是举一个例子来告诉你说,為什麼是Cross-entropy比较好




那现在我们要做一个**3个Class的分类**

Network先输出$y_1$ $y_2$ $y_3$,在通过soft-max以后,產生$y_1'$ $y_2'$跟$y_3'$

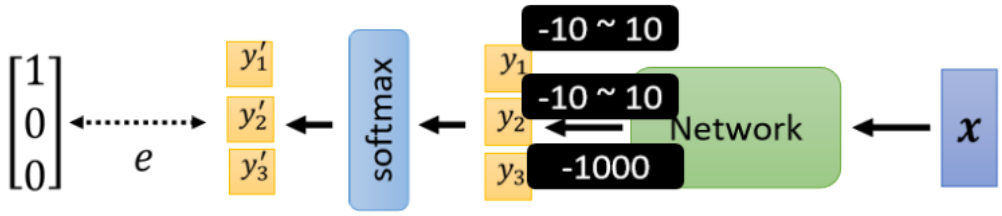
那接下来假设我们的正确答案就是100,我们要去计算100这个向量,跟$y_1'$ $y_2'$跟$y_3'$他们之间的距离,那这个距离我们用e来表示,e可以是Mean square error,也可以是Cross-entropy,

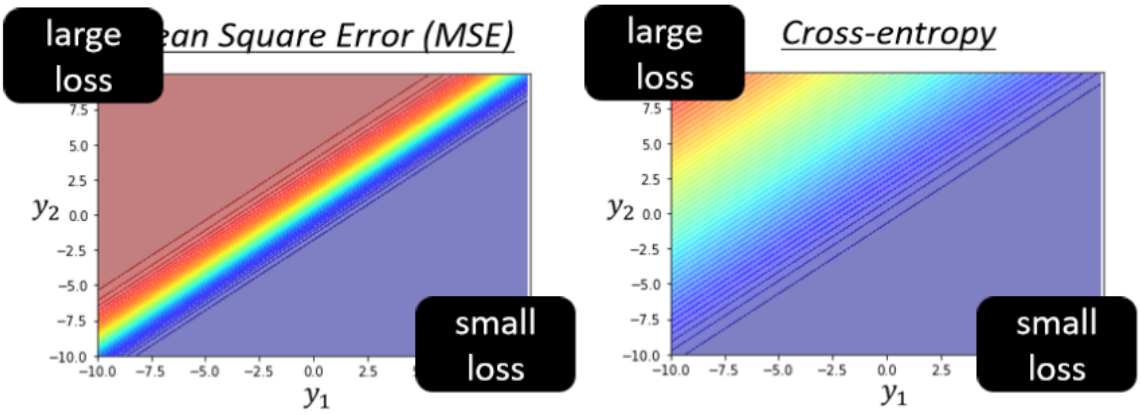
我们现在假设$y_1$的变化是从-10到10,$y_2$的变化也是从-10到10,$y_3$我们就固定设成-1000

因為$y_3$设很小,所以过soft-max以后$y_3'$就非常趋近於0,它跟正确答案非常接近,且它对我们的结果影响很少

总之我们**$y_3$设一个定值**,我们**只看$y_1$跟$y_2$有变化的时候,对我们的e对我们的Loss对我们loss有什麼样的影响**

那我们看一下 如果我们这个e,设定為Mean Square Error,跟Cross-entropy的时候,算出来的Error surface会有什麼样,不一样的地方.底下这两个图,就分别在我们e是Mean square error,跟Cross-entropy的时候,$y_1$ $y_2$的变化对loss的影响,对Error surface的影响,

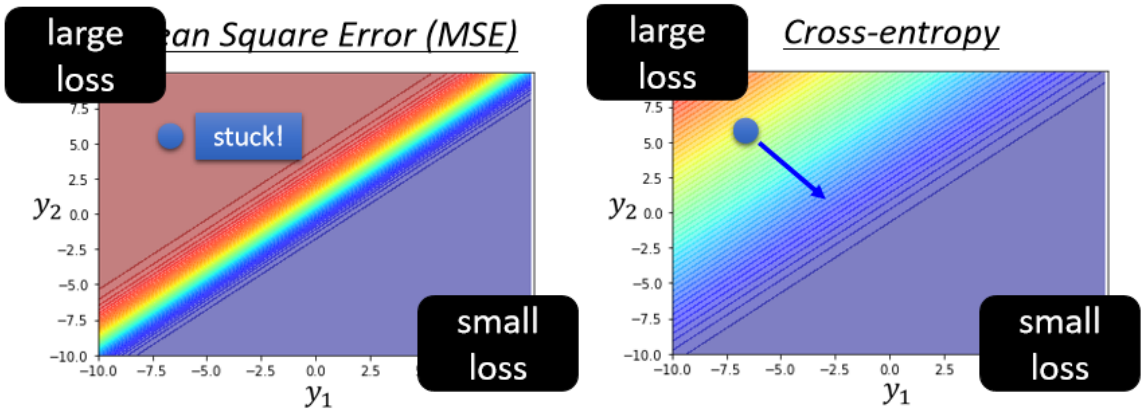



我们这边是用**红色代表Loss大,蓝色代表Loss小**

- 那如果今天$y_1$**很大** $y_2$**很小**,就代表$y_1$'**会很接近1,**$y_2$'**会很接近0**,所以不管是对Mean Square Error,或是Cross-entropy而言,$y_1$**大** $y_2$**小的时候 Loss都是小的**
- 如果$y_1$**小** $y_2$**大**的话,这边$y_1$'**就是0** $y_2$'**就是1**,所以这个时候Loss会比较大

所以这两个图都是**左上角Loss大,右下角Loss小**,所以我们就期待说,我们最后**在Training的时候,我们的参数可以走到右下角**的地方




**Changing the loss function can change the difficulty of optimization.**

那假设**我们开始的地方,都是左上角**

- 如果我们选择Cross-Entropy,左上角这个地方,它是有斜率的,所以你有办法透过gradient,一路往右下的地方走,
- 如果你选Mean square error的话,你就卡住了,Mean square error在这种Loss很大的地方,它是非常平坦的,它的gradient是非常小趋近於0的,如果你初始的时候在这个地方,离你的目标非常远,那它gradient又很小,你就会没有办法用gradient descent,顺利的走到右下角的地方去,

所以你如果你今天自己在做classification,你选Mean square error的时候,你有非常大的可能性会train不起来,当然这个是在你没有好的optimizer的情况下,今天如果你用Adam,这个地方gradient很小,那gradient很小之后,它learning rate之后会自动帮你调大,也许你还是有机会走到右下角,不过这会让你的training,比较困难一点,让你training的起步呢,比较慢一点

所以这边有一个很好的例子,是告诉我们说,就算是Loss function的定义,都可能影响Training是不是容易这件事情,刚才说要用神罗天征,直接把error surface炸平,这边就是一个好的例子告诉我们说,你可以改Loss function,居然可以改变optimization的难度,